Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului
Serviciul Naţional de Evaluare şi Examinare

A 45-a Olimpiadă Naţională de Matematică
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

6 martie 2004

CLASA A VIII-A

Subiectul 1

Fie numerele reale distincte a şi b care au proprietăţile:
$a^2 + b \in \mathbf{Q}$ şi $b^2 + a \in \mathbf{Q}$. Arătaţi că:
a) numerele $a = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ şi $b = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ verifică proprietăţile date;
b) dacă $a + b \in \mathbf{Q} \setminus \{1\}$, atunci a şi b sunt numere raţionale;
c) dacă $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$, atunci a şi b sunt numere raţionale.

Subiectul 2

Numerele naturale nenule a, b, c, d cu $a > b > c > d$ verifică simultan relaţiile

$$a + b + c + d = 2004 \ \text{ şi } \ a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2004.$$

a) Determinaţi cea mai mică valoare posibilă pentru a.
b) Câte valori posibile are a? Justificaţi răspunsul.

Subiectul 3

O mulţime de trei numere naturale distincte se numeşte *aritmetică* dacă unul dintre numere este media aritmetică a celorlalte două. Fie mulţimea $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Determinaţi numărul de submulţimi ale lui A_{10} care sunt mulţimi aritmetice.
b) Arătaţi că pentru $n \geq 91$ numărul de submulţimi aritmetice ale lui A_n este mai mare decât 2004.

Subiectul 4

În trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB||CD$, măsura unghiului B este de $90°$ şi $AB = 2DC$. În punctele A şi D se ridică de aceeaşi parte a planului (ABC) perpendiculare pe planul trapezului, pe care se iau punctele N şi P, (AP şi PD sunt perpendicularele pe plan) astfel încât $DN = a$ şi $AP = \frac{a}{2}$. Ştiind că M este mijlocul laturii BC şi triunghiul MNP este echilateral, determinaţi:

a) cosinusul unghiului dintre planele MNP şi ABC.
b) distanţa de la D la planul MNP;

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.